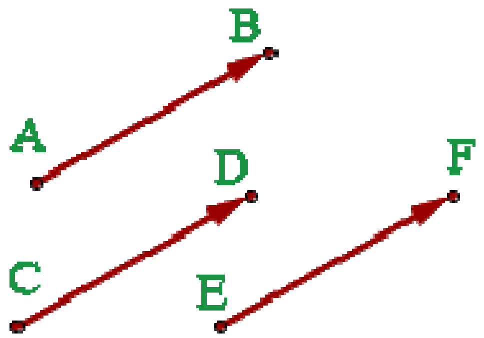
4. VECTORS DE L'ESPAI

Magnituds escalars: massa, temps, temperatura...
Magnituds vectorials: força, velocitat,...

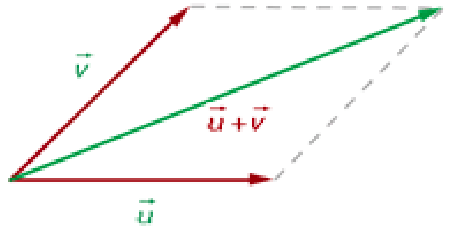
1. Vectors FIXOS (origen A i extrem B → $\overrightarrow{AB}$)
   a. Direcció: recta que passa per AB
   b. Sentit: identificar extrem i origen.
   c. Mòdul: longitud AB
      Si A=B → Vector nul. (mòdul=0)

2. Equipol·lència de vectors: mateixa direcció, mòdul i sentit.



3. Vectors LLIURES: conjunt de vectors fixos equipol·lents a un donat. Cadascun dels vectors fixos que componen un vector lliures és un representat d'aquest vector.

4. OPERACIONS AMB VECTORS LLIURES
   a. Suma i resta: $\vec{u}+\vec{v}$
      - Regla del paral·lelogram



      - Propietats:
        1. Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
        2. Element neutre: $\vec{w}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{w}=\vec{w}$
        3. Element oposat: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
        4. Commutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

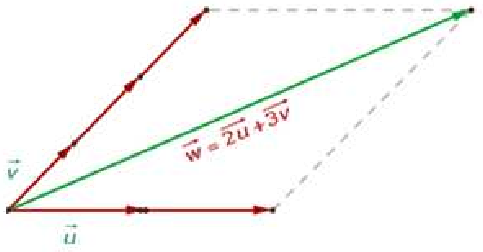
b. Multiplicació per un nombre real: $k\vec{u}$

- Propietats:
    1. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
    2. $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$
    3. $(k_1 \cdot k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
    4. $1\vec{u} = \vec{u}$

Pàg 119 ex 3 i 4

5. **COMBINACIÓ** LINEAL DE **VECTORS** (expressar un vector en funció de altres)

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n}$$



$\vec{u} = 2\vec{x} + 3\vec{y} - \vec{z}$

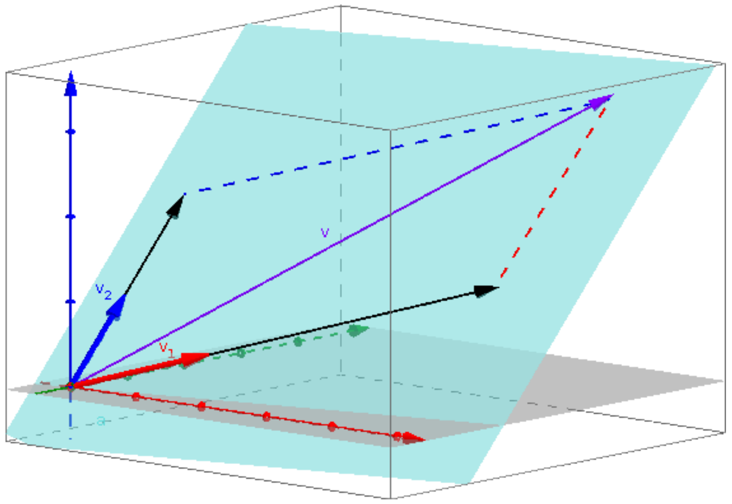
$\vec{0} = 0\vec{x} + 0\vec{y} + 0\vec{z}$

***Exemple:** $(9,-8,-1) = (1,1,0) + 3(2,-1,3) - 2(-1,3,5)$

$\vec{u} \quad = \quad \vec{x} \quad + \quad 3\vec{y} \quad - \quad 2\vec{z}$

a. Linealment DEPENDENTS: cada vector es pot expressar com a combinació lineal de la resta.

- V_2→ mateixa direcció
- V_3→ si són coplanaris (en el mateix pla)



- $V_{>3}$→ sempre són linealment dependents
- V_n→ rang de la matriu que formen les seves coordenades menor que n.

b. Linealment INDEPENDENTS: quan no es poden expressar com a combinació lineal de la resta.
   - V_2→ distinta direcció
   - V_3→ no són coplanaris
   - V_n→ rang de la matriu que formen les seves coordenades és n.

   *Dos vectors són paral·lels si són linealment dependents, és a dir, les seves coordenades són proporcionals.

→Determinació de la dependència lineal de vectors → rang

6. BASES V_3

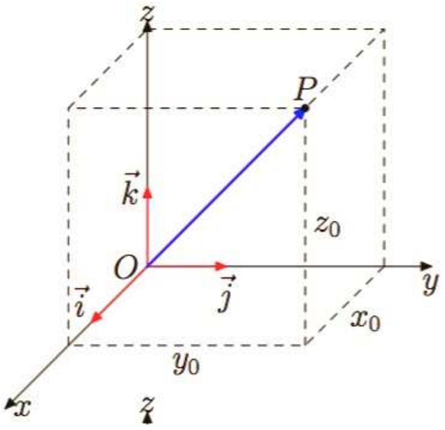
a. Tres vectors $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ no nuls, no coplanaris i linealment independents formen una BASE.
   - $\vec{x} = (1,0,0)$
   - $\vec{y} = (0,1,0)$
   - $\vec{z} = (0,0,1)$

b. El nombre de vectors de una base dona la dimensió del mateix.
c. Les coordenades d'un vector respecte d'una base són úniques.
d. Qualsevol altre vector de l'espai, pot expressar-se com a combinació d'aquests que formen la base.

   *Exemple: $\vec{u} = (7,3,2) = (\propto, \beta, \delta)$
   - $\vec{u} = \quad \propto \vec{x} \quad + \quad \beta\vec{y} \quad + \quad \delta\vec{z}$
   - $\vec{u} = (7,3,2) = 7(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1)$

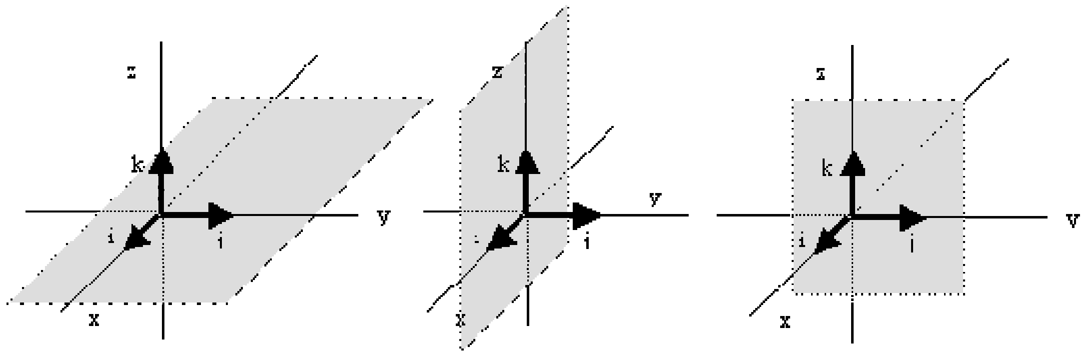
7. SISTEMA DE REFERÈNCIA: està format per un punt fix O (origen) i una base de l'espai$\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$.Qualsevol punt $P(x_0, y_0, z_0)$ té un vector de posició $\overrightarrow{OP}$→

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{x} + y_0\vec{y} + z_0\vec{z}$$



a. **SISTEMA DE REFERÈNCIA CANÒNIC** en l'espai és $\{\boldsymbol{O}, \{\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}\}$, on:

- El punt fix és l'origen de coordenades: O(0,0,0).
- Els vectors de la base $V = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ són de mòdul 1 i perpendiculars entre sí.



8. COMPONENTS D'UN VECTOR I MÒDUL

En el sistema de referència canònic, les coordenades d'un vector $\overline{AB}$ són les coordenades del punt extrem menys les de l'origen.

- $\begin{cases} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (v_1, v_2, v_3) = \vec{v}$
- Mòdul: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

9. APLICACIONS

a. Punt mig d'un segment: Donats dos punts $\begin{cases} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{cases}$ tenim que el punt mig del segment $\overline{AB}$ verifica: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

$$M = \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}$$

b. Punts alineats: tres punts de l'espai estan alineats sí els vectors que formen són proporcionals o iguals.

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$$

10. EQUACIONS DE LA RECTA A L'ESPAI.

Una recta r a l'espai ve determinada per:

- ✓ Un punt P_0 de la recta: el vector $\overrightarrow{OP_0}$ és el **vector posició.**
- ✓ Un vector $\vec{u}$ la direcció del qual és la recta i es denomina **vector director.**

$$P = (x, y, z)$$
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) punt\ donat$$
$$\vec{v} = (a, b, c)$$

a. Equació vectorial:

$$\boldsymbol{r}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

b. Equacions paramètriques:

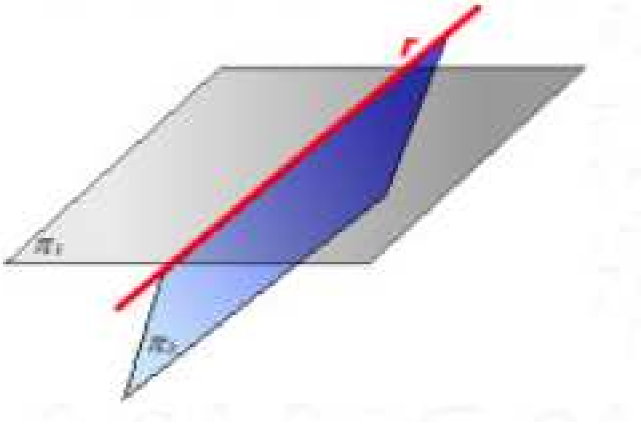
$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \propto \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} + \propto \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \propto \boldsymbol{c} \end{cases}$$

c. Equació contínua:

$$\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}}{\boldsymbol{c}}$$

d. Equacions implícites o cartesianes:

Separem les equacions de la equació contínua y agrupem els termes a un membre, obtenim dues equacions implícites. (són dos plans que es tallen)



11. EQUACIONS DEL PLA A L'ESPAI

Necessitem:

- ✓ 1 punt i 2 vectors linealment independents
- ✓ 2 punts i un vector director
- ✓ 3 punts no alineats

Un pla π queda determinat per:

- ✓ Un punt P_0 del pla: el vector $\overrightarrow{OP_0}$ és el **vector posició.**
- ✓ Dos vectors $\vec{u}\ i\ \vec{v}$ no proporcionals que denominarem **vectors directors** del pla.

$$P = (x, y, z)$$
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) punt\ donat$$
$$\vec{v} = (a, b, c)$$
$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$$

a. Equació vectorial:

$$\boldsymbol{\pi}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{c_1})$$

b. Equacions paramètriques:

$$\boldsymbol{\pi}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \propto \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta a_1} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} + \propto \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\beta b_1} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \propto \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\beta c_1} \end{cases}$$

c. Equació general o implícita:

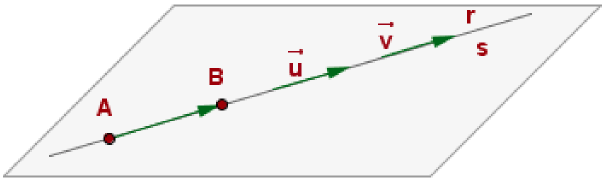
Determinant: $\pi = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \rightarrow \pi: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

12. POSICIONS RELATIVES DUES RECTES

A partir de les rectes donades com:

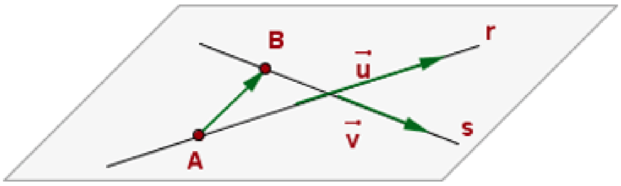
$r: \begin{cases} P = (x, y, z) \\ \vec{v} = (a, b, c) \end{cases}$ i $s: \begin{cases} Q = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \end{cases}$

a. Coincidents: vectors proporcionals



$$Rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \end{pmatrix} = 1$$

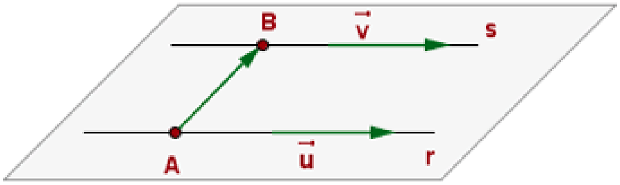
b. Secants: Les dos rectes es tallen en un punt. Vectors no són proporcionals i el vector format pels dos punts és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



$$Rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \end{pmatrix} = 2$$

$$Rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 2$$

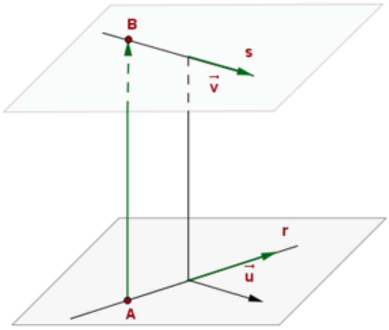
c. Paral·leles: No tenen punts en comú, però estan compreses al mateix pla. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són proporcionals.



$$Rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$Rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \end{pmatrix} = 2$$

d. Es creuen: Les dues rectes no tenen punts en comú ni estan compreses al mateix pla. Els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\overrightarrow{PQ}$ formen una base.



$$Rang\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \end{pmatrix} = 3$$

A partir de les rectes donades per les seves **equacions implícites**:

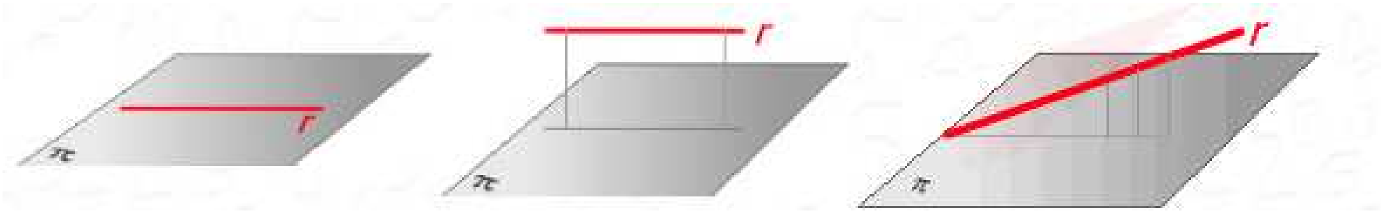
$$r:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases} \text{ i } \quad r:\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2 = 0 \end{cases}$$

Estudiem el rang de la matriu formada per les equacions de les dues rectes:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{array}\right)$$ M'→ Matriu ampliada. M→ Matriu de coeficients.

a. Coincidents: Rg(M)=2 Rg(M')=2
b. Secants: Rg(M)=3 Rg(M')=3
c. Paral·leles: Rg(M)=2 Rg(M')=3
d. Es creuen: Rg(M)=3 Rg(M')=4

13. POSICIONS RELATIVES RECTA I PLA



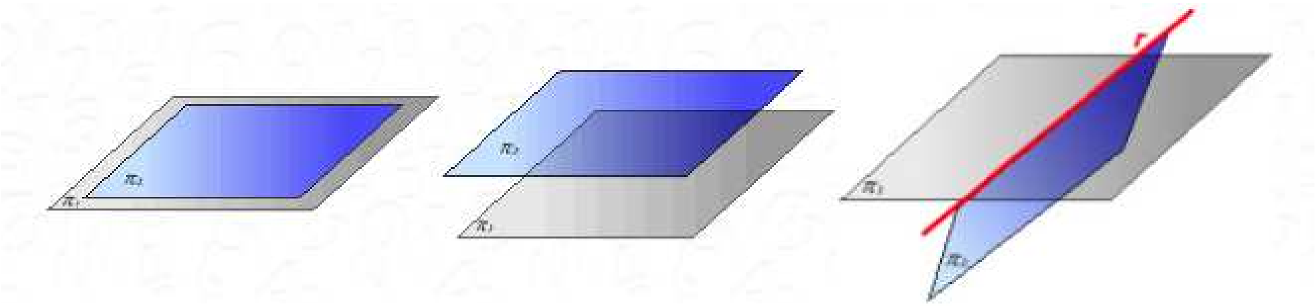
$$r:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases} \text{ i } \pi: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Estudiem el rang de la matriu formada per els coeficients de les equacions implícites de la recta i l'equació general del pla.

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$$

a. Secants: Rg(M)=3 Rg(M')=3
b. Paral·lels: Rg(M)= 2 Rg(M')= 3
c. Recta continguda en el pla: Rg(M)= 2 Rg(M')= 2

14. POSICIONS RELATIVES DOS PLANS



Estudiem la matriu formada per les equacions generals dels plans:

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$$

a. Coincidents: Rg(M)= 1 Rg(M')= 1
b. Secants: Rg(M)= 2 Rg(M')= 2
c. Paral·lels: Rg(M)= 1 Rg(M')= 2

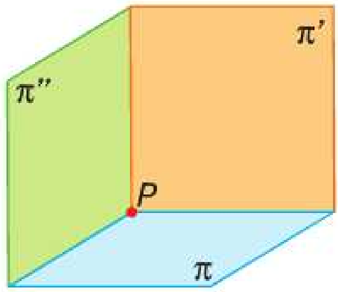
15. POSICIONS RELATIVES TRES PLANS

Estudiem la matriu formada per les equacions dels tres plans.

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
$\pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

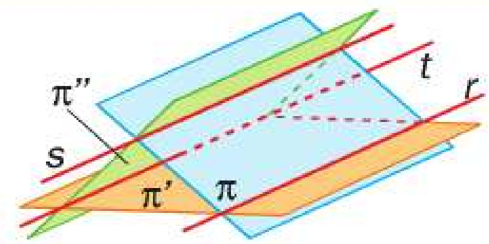
$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

a. Es tallen en un punt:



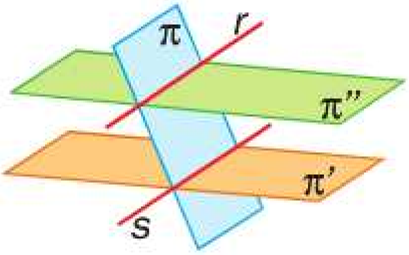
Rg(M)= 3
Rg(M')= 3

b. Es tallen dos a dos:



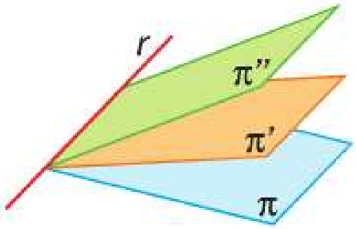
Rg(M)= 2
Rg(M')= 3

c. Dos plans paral·lels i un secant:



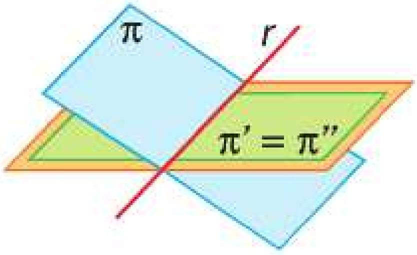
Rg(M)= 2
Rg(M')= 3

d. No coincidents i es tallen en una recta:



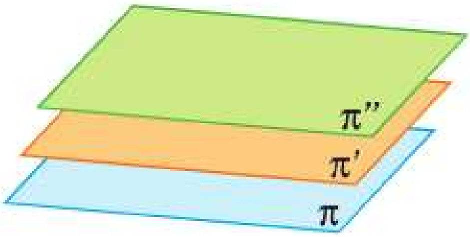
Rg(M)= 2
Rg(M')= 2

e. Dos plans coincidents i un tercer que els talla:



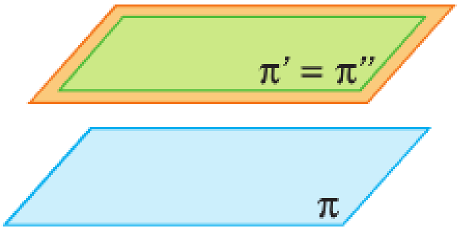
Rg(M)= 2
Rg(M')= 2

f. Tres plans paral·lels:



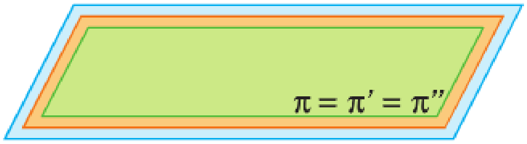
Rg(M)= 1
Rg(M')= 2

g. Dos plans coincidents i paral·lels al tercer:



Rg(M)= 1
Rg(M')= 2

h. Tres plans coincidents:



Rg(M)= 1
Rg(M')= 1